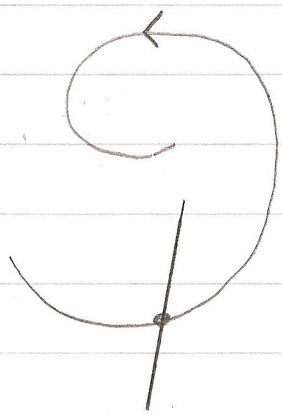
§4 Spezielle Klassen von Flächen

I. Regelflächen (ruled surfaces)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine Raumkurve. Seien weiter ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ gegeben und eine glatte Abbildung $w : I \to \mathbb{R}^3 - \{0\}$. Dann ist

$$J \ni u \mapsto \alpha(t) + u\, w(t)$$

bei festem t die Parametrisierung des Teiles einer Geraden, die im Fall $u = 0 \in J$ durch den Kurvenpunkt $\alpha(t)$ geht mit Richtung $w(t)$.



Setzt man

$$(1) \quad \boxed{\begin{array}{l} X(t,u) := \alpha(t) + u\, w(t), \\ t \in I,\ u \in J, \end{array}}$$

so hat man die Vorstellung, dass X diejenige Fläche beschreibt, die durch Vereinigung all dieser Geradenstücke entsteht.

<u>Definition:</u> Eine <u>reguläre</u> Fläche, die durch eine Parametrisierung der Form (1) entsteht, heißt <u>Regelfläche</u>.

Es gilt $X_t(t,u) = \alpha'(t) + u\, w'(t)$, $X_u(t,u) = w(t)$, und bei einer regulären Fläche müssen daher $\alpha'(u) + u\, w'(t)$, $w(t)$ für alle $(t,u) \in I \times J$ linear unabhängig sein. Wir wollen aber nachfolgend diese Bedingung nicht immer stellen, sondern die beschreibende Gleichung (1) einfach als Definition nehmen.

<u>Beispiel 1:</u> <u>Tangentenfläche</u>

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert.

Man setzt $\quad J = (0,\infty)$ oder $= (-\infty, 0)$ sowie

$$\boxed{X^{\pm}(t,u) := \alpha(t) + u\,\alpha'(t), \quad t \in I,\ u \in J}$$

Hier ist also $\quad w(t) = \alpha'(t)$ gewählt. Es gilt

$$X^{\pm}_t(t,u) = \alpha'(t) + u\,\alpha''(t), \quad X^{\pm}_u(t,u) = \alpha'(t),$$

also:

$$X^{\pm}_t \times X^{\pm}_u = u\,\alpha''(t) \times \alpha'(t).$$

Wir haben für die Krümmung von α gezeigt:

$$\varkappa_\alpha(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}.$$

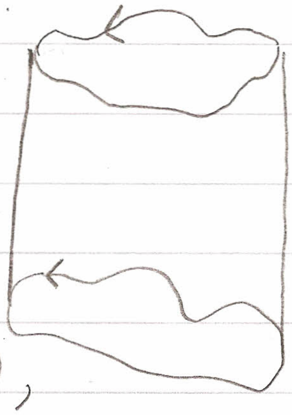
Setzt man also $\varkappa_\alpha > 0$ auf I voraus, so folgt, dass die Tangentenflächen zumindest lokal reguläre Flächen gemäß unserer Definition sind. (Beachte: $u = 0 \notin J$!)

<u>Beispiel 2</u> <u>Helikoid</u>

⟨Übung⟩ Das Helikoid kann als Regelfläche

$X(t,u) = \alpha(t) + u\, w(t)$ geschrieben werden mit $\alpha(t) = (0,t,0)$, $w(t) = (1,0,\tan t)$. Im übrigen ist das Helikoid die einzige - nicht ebene - Regelfläche, die auch Minimalfläche ist.

3.) <u>Verallgemeinerter Zylinder über einer Kurve</u>



Sei $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eine (geschlossene?) ebene Kurve ohne Selbstdurchschneidungen, o. E. $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$, und $w \equiv (0,0,1)$. Dann heißt

$$X(t,u) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), u)$$

der verallgemeinerte Zylinder über α.

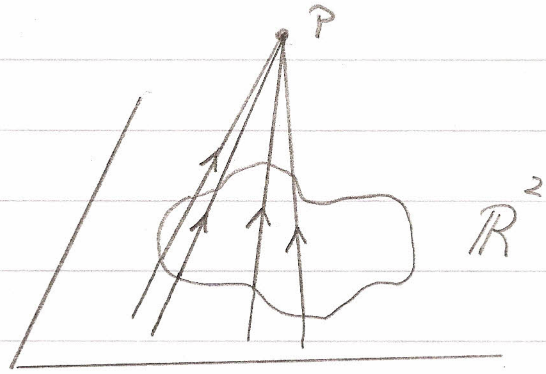
4.) Sei $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$ wie in 3.) und $P \in \mathbb{R}^3 - (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ ein fixierter Punkt.

Mit $w(t) := p - \alpha(t)$ sei

$X : I \times (-\infty, 1) \to \mathbb{R}^3$

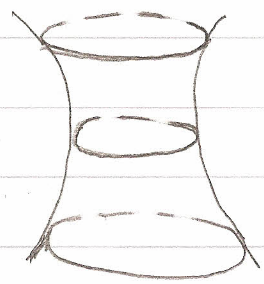
$X(t,u) = (1-u)\,\alpha(t) + u\,P$

$= \alpha(t) + u\, w(t)$.



Für $u = 0$ ist $X(t,0)$ gerade ein Punkt auf α, für $u = 1$ münden die Strecken in P. Man nennt X den verallgemeinerten Kegel über α mit Spitze in P.

5) Auch das Rotationshyperboloid $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + z^2 = x^2 + y^2\}$ ist eine Regelfläche: Wählt man



$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ (1-Kreislinie in der (x,y)-Ebene) und

$w(t) = (\alpha'(t), 1) = (-\sin t, \cos t, 1)$,

so ist $X(t,u) = \alpha(t) + u\, w(t)$ eine Darvon S : Aus $X(t,u) = (\underbrace{\cos t - u\sin t}_{=:x}, \underbrace{\sin t + u\cos t}_{=:y}, u)$

folgt ja $x^2+y^2 = (\cos t - u\sin t)^2 + (\sin t + u\cos t)^2 =$

$\cos^2 t + u^2\sin^2 t + \sin^2 t + u^2\cos^2 t = 1+u^2.$

$\square$

Man hat:

$$\boxed{X \text{ Regelfläche} \Longrightarrow \text{Gauß-Krümmung } K \leq 0}$$

Beweis: Sei $X(t,u) = \alpha(t) + u\,w(t)$. Dann ist $X_{uu} \equiv 0$ und somit $\mathcal{N} \equiv 0$ (beachte: wir bezeichnen die Variablen hier mit (t,u), u hat also die Rolle des früheren v!), aus

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \quad \text{wird} \quad K = -\mathcal{M}^2/(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2),$$

und $\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 > 0$ (wir nehmen an, dass X regulär ist) ergibt $K \leq 0$.

$\square$

II. Minimalflächen

waren nach unserer Definition Flächen $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit Eigenschaft H (= mittlere Krümmung) $\equiv 0$. Dies lässt zunächst keinerlei Minimalität von X erkennen. Um einen anderen Blickwinkel zu bekommen, betrachten wir irgendeine Fläche $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$, fixieren eine (kleine) offene Menge $\mathcal{U}$ mit $\overline{\mathcal{U}} \subset \Omega$ und betrachten $\eta : \overline{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}$ beliebig, allerdings $\eta \equiv 0$ nahe $\partial \mathcal{U}$. Man setzt für $t \in \mathbb{R}$, $|t| \ll 1$

$$\Phi(u,v,t) := X(u,v) + t\,\eta(u,v)\,N(u,v)\,,$$

$$\overset{t}{X} : \Omega \to \mathbb{R}^3\,, \quad \overset{t}{X}(u,v) := \Phi(u,v,t)\,,$$

d.h.: Außerhalb von $\mathcal{U}$ stimmen alle Flächen mit X überein, es gilt $\overset{0}{X} = X$, und innerhalb von $\mathcal{U}$ wird die Fläche X in normaler Richtung variiert. Unser Ziel ist die Berechnung von $\frac{d}{dt}\big|_0 A_\Omega(\overset{t}{X})$, $A_\Omega(\overset{t}{X}) =$

Flächeninhalt von X^t, in geometrischen Größen von X.
Ist nämlich dann X eine "Minimalfläche", also eine Fläche, die unter allen Flächen $Y: \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit festem Rand den Inhalt minimiert, so muss $0 = \frac{d}{dt|_0} A_\Omega(X_t)$ sein mit der Konsequenz, dass die zu bestimmenden geometrischen Größen von X verschwinden. Hierbei wird es sich um die mittlere Krümmung H handeln.

Es gilt (mit der üblichen Symbolik für partielle Ableitungen)

$$X^t_u = X_u + t\eta N_u + t\eta_u N,$$

$$X^t_v = X_v + t\eta N_v + t\eta_v N,$$

und man bekommt für die Koeffizienten der Fundamentalmatrix von I (wegen $X_u \cdot N = 0 = N_u \cdot N$, etc.)

$$\mathcal{E}^t := X^t_u \cdot X^t_u = \mathcal{E} + 2t\eta X_u \cdot N_u + t^2\eta^2 |N_u|^2 + t^2 (\eta_u)^2,$$

$$\mathcal{F}^t := \overset{t}{X}_u \cdot \overset{t}{X}_v = \mathcal{F} + t\eta\,(X_u \cdot N_v + X_v \cdot N_u)$$

$$+ t^2\left(\eta^2\, N_u \cdot N_v + \eta_u \eta_v\right),$$

$$\mathcal{G}^t := \overset{t}{X}_v \cdot \overset{t}{X}_v = \mathcal{G} + 2t\eta\, X_v \cdot N_v + t^2 \eta^2 |N_v|^2$$

$$+ t^2 (\eta_v)^2,$$

so dass

$$\mathcal{E}^t \mathcal{G}^t - (\mathcal{F}^t)^2 = \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 + t\,(2\eta\, \mathcal{E}\, X_v \cdot N_v$$

$$+ 2\eta\, \mathcal{G}\, X_u \cdot N_u - \mathcal{F}\eta\, 2\,[X_u \cdot N_v$$

$$+ X_v \cdot N_u]) + t\, R(u,v,t)$$

mit $\lim\limits_{t \to 0} R(u,v,t) = 0.$ Per Definition ist

$$X_u \cdot N_u = -\mathcal{L}, \quad X_u \cdot N_v = X_v \cdot N_u = -\mathcal{M},$$

$$X_v \cdot N_v = -\mathcal{N},$$

also:

$$\mathcal{E}^t \mathcal{G}^t - (\mathcal{F}^t)^2 = \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 - 2t\eta\,[\mathcal{N}\mathcal{E} +$$

$$- 2\mathcal{F}\mathcal{M} + \mathcal{G}\mathcal{L}] + t R(t,u,v).$$

Für den Flächeninhalt von X^t gilt

$$A_\Omega(X^t) = \int_\Omega |X_u^t \times X_v^t| \, du\, dv =$$

$$\int_\Omega \sqrt{\mathcal{E}^t \cdot \mathcal{G}^t - (\mathcal{F}^t)^2} \, du\, dv \Longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt|_0} A_\Omega(X^t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}} (-2)\eta \left[\mathcal{N}\mathcal{E} - 2\mathcal{F}\mathcal{M} + \mathcal{G}\mathcal{L}\right] du\, dv$$

$$= -2 \int_\Omega \eta \; \frac{1}{2} \frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2} \left[\mathcal{N}\mathcal{E} - 2\mathcal{M}\mathcal{F} + \mathcal{L}\mathcal{G}\right] \cdot \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2} \, du\, dv$$

$$= -2 \int_U \eta \, H \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2} \, du\, dv.$$

Ist also $H \equiv 0$, so folgt $A_\Omega'(0) = 0$ für alle U offen in Ω mit $\overline{U} \subset \Omega$ und alle normalen Variationen.

Umgekehrt: Ist X tatsächlich lokal flächenminimal, so ist $A_\Omega(0) \leq A_\Omega(t)$, also $A_\Omega'(0) = 0$, so dass nach obiger Rechnung

$$\int_U \eta\, H \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}\, du\, dv \equiv 0$$

für alle U wie oben und alle η mit Träger in U. Dann ist aber $H \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2} \equiv 0$, also $H \equiv 0$ wegen $\sqrt{} > 0$.

Minimalflächen ("$H \equiv 0$") sind nach dieser Überlegung genau die kritischen Punkte des Flächenfunktionals bzgl. normaler Variationen. Bekanntlich sind kritische Punkte nicht notwendig (lokale) Extrema, hier gilt jedoch:

> Erfüllt die Fläche $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ die Forderung $H \equiv 0$, so ist X lokal flächenminimal.

Zum Schluss betrachten wir noch eine besondere Form der Parametrisierung von Flächen, die für Minimalflächen einer sehr einfachen Differentialgleichung genügt: